Задачи 2009-2010 учебного года.

**Задача 1** *Пусть $X$, $Y$ – пара компактных пространств, $f : X \to Y$ непрерывное взаимнооднозначное отображение. Докажите, что $f^{-1} : Y \to X$ также непрерывно. Постройте контрпример для некомпактного случая.*

Определим пространство $l^2$ как множество бесконечных последовательностей вещественных чисел $\vec{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n, \ldots)$ таких, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} (x^j)^2 < \infty.$$

норма в $l^2$ задается формулой

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} (x^j)^2}.$$

Последовательность $\vec{x}_k$ элементов пространства $l^2$, где $\vec{x}_k = (x^1_k, x^2_k, \ldots, x^n_k, \ldots)$ называется **последовательностью Коши**, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ такое, что для $\forall k, l > N$ $\|\vec{x}_k - \vec{x}_l\| < \varepsilon$.

**Задача 2** *Докажите, что пространство $l^2$* **полно***, т.е. любая последовательность Коши имеет предел.*

**Задача 3** *Докажите, что в стандартной топологии, задаваемой нормой в $l^2$ единичный шар в пространстве $l^2$*

$$\|\vec{x}\| \leq 1$$

*некомпактен.*

Введем **слабую топологию на** $l^2$. В качестве **предбазы** возьмем следующий набор множеств: для любой тройки $\vec{x}_j$, $\vec{y}_j$, $\varepsilon_j$, где $\vec{x}_j$, $\vec{y}_j \neq \vec{0}$ – пара векторов из $l^2$, $\varepsilon_j > 0$ – вещественное число, $U_j$ задается неравенством $|(\vec{y}_j, \vec{x} - \vec{x}_j)| < \varepsilon_j$, где

$$(\vec{y}, \vec{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} y^j x^j.$$

В качестве **базы** топологии возьмем всевозможные конечные пересечения множеств $U_j$. Открытыми множествами назовем всевозможные объединения множеств из базы.

**Задача 4** *Докажите, что в слабой топологии $l^2$ единичный шар в пространстве $l^2$ компактен.*

**Задача 5** *Постройте отображение из области $\mathbb{R}^n$ в область $\mathbb{R}^n$ с якобианом, отличным во всех точках от 0, но не являющееся взаимнооднозначным.*

**Задача 6** *Докажите, что пространство $\mathbb{R}P^n$ неориентируемо при четном $n$ и ориентируемо при нечетном.*

**Задача 7** *Постройте вложение компактного многообразия в евклидово пространство $M^n \to \mathbb{R}^N$ такое, что его образ* **глобально** *не задается системой уравнений*

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1(y^1, \dots, y^N) = 0 \\ \\ \phi_{N-n}(y^1, \dots, y^N) = 0 \end{array} \right. \tag{1}$$

Пусть $f : M^m \to N^n$ – гладкое отображение из гладкого многообразия в гладкое многообразие, причем в локальных координатах

$$\left\{ \begin{array}{l} y^1 = f^1(x^1, \dots, x^m) \\ \\ y^n = f^n(x^1, \dots, x^m) \end{array} \right. .$$

Точка $x \in M$ называется **регулярной**, если ранг якобиана в ней максимален:

$$\mathrm{r}k \left( \begin{array}{ccc} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{array} \right) = \min(m, n).$$

Точка, в которой ранг меньше максимального, называется **особой**.

**Задача 8** *Проверьте, что данное определение корректно, т.е. не зависит от выбора локальых систем координат.*

Точка $y \in N$ называется **регулярной**, если все ее прообразы регулярны. Эквивалентно, образы всех особых точек из $M$ – особые точки $N$.

В многообразии $M$ особые точки могут занимать целые области. Однако согласно **Лемме Сарда** множество особых точек в $N$ всегда имеет меру 0.

**Задача 9** *Пусть* $f : M^n \to N^n$ *– гладкое отображение компактного многообразия в компактное многообразие той же размерности. Докажите, что число прообразов регулярной точки всегда конечно. Постройте контрпример для некомпактного случая.*

**Задача 10** *Рассмотрим отображение* $f : S^3 \to S^2$*. Докажите, что инвариант Хопфа можно задать следующей формулой: Пусть* $\omega$ *– форма объема на* $S^2$*, нормированная условием*

$$\int\limits_{S^2} \omega = 1,$$

*ее прообраз на* $S^3$ *обозначим* $\omega^*$, $v$ *– 1-форма на* $S^3$ *такая, что*

$$dv = \omega^*.$$

*Тогда инвариант Хопфа задается формулой*

$$h = \int\limits_{S^3} v \wedge \omega^*$$

**Задача 11** *Постройте двулистное накрытие над сферой с 2 ручками. Над сферой с n ручками.*

**Задача 12** *Постройте накрытие над букетом двух окружностей, отвечающее подгруппе-коммутанту группы* $\pi_1$*. То же для n окружностей.*

**Задача 13** *Пусть* $A$ *– целочисленная 2x2 матрица с ненулевым детерминантом. Тогда отображение*

$$A : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

*задает накрытие* $T^2 \to T^2$, $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

1. *Вычислите число листов этого накрытия.*
2. *При разных* $|\det A|$ *эти накрытия не эквивалентны.*

*3. Все накрытия с $|\det A| = 2$ эквивалентны.*

*4. Все накрытия с $|\det A| = 6$ эквивалентны.*

*5. Постройте два неэквивалентных накрытия с $|\det A| = 4$.*

*6. Дайте полную классификацию таких накрытий.*

**Задача 14**

*Постройте накрытие $S^3$ над трехмерным многообразием с группой $\mathbb{Z}_n$.*

**Задача 15**

*Опишите все двумерные алгебры Ли.*

**Задача 16** *Докажите, что ядро формы Картана-Киллинга – идеал алгебры.*