Задачи занятия 12 марта 2014 года.

Рассмотрим модель Пуанкаре плоскости Лобачевского – это внутренность круга. Граничная окружность называется абсолютом. В этой модели прямые – это прямые или окружности, перпендикулярные абсолюту. Изометрии модели – дробно-линейные преобразования, углы в данной модели изображаются обычными углами.

Задача 1 *Построить правильный 8-угольник в моделе Пуанкаре с углами при вешинах 45 градусов.*

Задача 2 *Построить преобразование, перемещающее правильный 8-угольник с углами 45 градусов в прилегающий к нему. При этом сторона, по которой восьмиугольники соприкасаются, должна перейти в противоположную.*

Задача 3 *С помощью операций над многоугольниками (или, что эквивалентно, вычислений в группах), докажите, что* $\mathbb{R}P^2 \sharp T^2 = \mathbb{R}P^2 \sharp K$ *(здесь* K*-бутылка Клейна).*

Задача 4 *Рассмотрим два способа склейки восьмиугольника – по правилу* $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$ *и по правилу* $ABCDA^{1}B^{-1}C^{-1}D^{-1}$. *Докажите, что они дают изоморфные 2-мерные многообразия.*

Задача 5 *Рассмотрим локально мероморфное векторное поле в области комплексной плоскости* $f(z)\partial_z$. *Как связаны его вещественная и мнимая части?*

Задача 6 *Рассмотрим локально мероморфное векторное поле* $f(z)\partial_z$. *Рассмотрим его вещественную часть. Чему равен ее индекс в нуле? В полюсе?*

Задача 7 *Рассмотрим локально мероморфное векторное поле в области комплексной плоскости* $f(z)\partial_z$. *Докажите, что* $\frac{1}{f(z)}dz$ *– корректно определенная 1-форма (т.е. данное определение на зависит от выбора координат). Как вычислить эйлерову характеристику римановой поверхности по мероморфной 1-форме на ней?*

Задача 8 *Вычислить особенность поля* ∂_z *на* $\mathbb{C}P^1$ *в бесконечно удаленной точке.*

Задача 9 *Рассмотрим риманову поверхность* $\Gamma : w^2 = P(z)$, *где* $P(z)$-*многочлен 6-ой степени. При каких* $k \geq 0$ *дифференциал*

$$\frac{z^k dz}{2\sqrt{P(z)}}$$

регулярен в бесконечно удаленной точке.

Задача 10 *Рассмотрим* $n - s$ *кривую, т.е. риманову поверхность, заданную уравнением:* $z^n - w^s + R(z, w) = 0$, *где* n *и* s *– взаимно простые натуральные числа, для всех мономов* $z^k w^l$, *входящих в* $R(z, w)$, *выполнено соотношение* $ks + nl < ns$. *Вычислить ее эйлерову характеристику.*

Указание: *Можно рассмотреть форму* $\omega = \frac{dz}{R_w(z,w)} = -\frac{dw}{R_z(z,w)}$.