

Задачи занятия 15 апреля 2015 года.

Задача 1 Пусть задано пространство X с отмеченной точкой x_0 и путь в нем $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. Пусть $\tau(t)$ произвольная непрерывная функция $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = 1$. Тогда пути $\gamma(t)$ и $\gamma(\tau(t))$ гомотопны.

Задача 2 Докажите, что $\pi_1(X \times Y) = \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.

Задача 3 Пусть на двумерном диске D^2 задано постоянное векторное поле. Рассмотрим отображение диска в S^2 , покрывающее всю сферу кроме окрестности северного полюса, при котором граница диска переходит в маленькую окружность вблизи северного полюса. Опишите, как выглядит образ поля вблизи северного полюса. Какова его степень?

Задача 4 Найдите универсальные накрытия над S^1 , $S^1 \vee S^1$, $S^1 \vee S^2$, $\mathbb{R}P^2$, K^2 (бутылкой Клейна), T^2 , M_g^2 (сферой с g ручками, последний пункт сложнее).

Задача 5 Докажите, что $SO(3) = \mathbb{R}P^3$, $SU(2) = S^3$ = множество кватернионов единичной длины. Рассмотрим действие $SU(2)$ на чисто мнимых кватернионах $x = bi + cj + dk$:

$$q : x \rightarrow qxq^{-1}, \quad q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k, \quad |q| = 1.$$

- Проверьте, что это действие задает ортогональное отображение трехмерного пространства чисто мнимых кватернионов.
- Проверьте, что это гомоморфизм групп $SU(2) \rightarrow SO(3)$.
- Проверьте, что $SU(2)$ – универсальное накрытие группы $SO(3)$.

Задача 6 Рассмотрим действие $SU(2) \times SU(2)$ на кватернионах $x = a + bi + cj + dk$:

$$(q_1, q_2) : x \rightarrow q_1xq_2^{-1}, \quad |q_1| = |q_2| = 1.$$

- Проверьте, что это гомоморфизм групп $SU(2) \times SU(2) \rightarrow SO(4)$.
- Проверьте, что $SU(2) \times SU(2)$ – универсальное накрытие группы $SO(4)$.

- Докажите, что имеет место гомеоморфизм топологических пространств:
 $SU(4) = S^3 \times \mathbb{R}P^3$.

Задача 7 Пусть $\tilde{X} \rightarrow X$ – некоторое накрытие. Тогда $\pi_n(\tilde{X}) = \pi_n(X)$ при $n \geq 2$.

Задача 8 Вычислите $\pi_2(S^1 \vee S^2)$, $\pi_3(S^1 \vee S^2)$ (вторая часть сложнее, для желающих)