

Задачи занятия 25 марта 2015 года.

**Задача 1** Докажите проективную инвариантность двойного отношения четверки точек на прямой.

**Задача 2** Докажите, что двумерная проективная плоскость  $\mathbb{R}P^2$  неориентируема.

**Задача 3** Докажите, что вложение  $\mathbb{R}P^2$  в  $\mathbb{R}^N$  нельзя глобально задать системой из  $N - 2$  уравнений.

**Задача 4** Докажите, что бутылка Клейна  $K^2$  неориентируема.

**Задача 5** При каких  $n$  пространство  $\mathbb{R}P^n$  ориентируемо.

**Задача 6** Докажите, что при всех  $n$  пространство  $\mathbb{C}P^n$  ориентируемо.

**Задача 7** Проективная плоскость получается из сферы отождествлением антиподальных точек. При этом метрика на сфере порождает метрику на проективной плоскости. Вычислите эту метрику в однородных координатах.

**Задача 8** Вычислите естественную эрмитову метрику на  $\mathbb{C}P^n$  в однородных координатах.

**Задача 9** Рассмотрим расслоение Хопфа  $S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^1 = S^2: S^3 = \{(z^1, z^2) \in \mathbb{C}^2 \mid z^1 \bar{z}^1 + z^2 \bar{z}^2 = 1\}, (z^1, z^2) \rightarrow z^1 : z^2 \in \mathbb{C}P^1$ .

Сделаем стереографическую проекцию  $S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  из точки  $(0, i)$ . Тогда возникает отображение из  $\mathbb{R}^3$  в сферу Римана. Прообразы всех точек (кроме одной) – окружности. Описать возникшую конфигурацию окружностей в  $\mathbb{R}^3$ .