

Задачи занятия 25 марта 2015 года.

Задача 1 Докажите проективную инвариантность двойного отношения четверки точек на прямой.

Задача 2 Докажите, что двумерная проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$ неориентируема.

Задача 3 Докажите, что вложение $\mathbb{R}P^2$ в \mathbb{R}^N нельзя глобально задать системой из $N - 2$ уравнений.

Задача 4 Докажите, что бутылка Клейна K^2 неориентируема.

Задача 5 При каких n пространство $\mathbb{R}P^n$ ориентируемо.

Задача 6 Докажите, что при всех n пространство $\mathbb{C}P^n$ ориентируемо.

Задача 7 Проективная плоскость получается из сферы отождествлением антиподальных точек. При этом метрика на сфере порождает метрику на проективной плоскости. Вычислите эту метрику в однородных координатах.

Задача 8 Вычислите естественную эрмитову метрику на $\mathbb{C}P^n$ в однородных координатах.

Задача 9 Рассмотрим расслоение Хопфа $S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^1 = S^2: S^3 = \{(z^1, z^2) \in \mathbb{C}^2 \mid z^1 \bar{z}^1 + z^2 \bar{z}^2 = 1\}, (z^1, z^2) \rightarrow z^1 : z^2 \in \mathbb{C}P^1$.

Сделаем стереографическую проекцию $S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ из точки $(0, i)$. Тогда возникает отображение из \mathbb{R}^3 в сферу Римана. Прообразы всех точек (кроме одной) – окружности. Описать возникшую конфигурацию окружностей в \mathbb{R}^3 .