

Задачи занятия 11 февраля 2016 года.

Задача 1 Пусть на пространстве X задана топология, в которой открыты само X и пустое множество \emptyset . Опишите все непрерывные отображения $X \rightarrow \mathbb{R}$ и $\mathbb{R} \rightarrow X$.

Задача 2 Пусть на пространстве X задана топология, в которой открыты все подмножества (дискретная топология). Опишите все непрерывные отображения $X \rightarrow \mathbb{R}$ и $\mathbb{R} \rightarrow X$.

Задача 3 Рассмотрим топологию Зарисского в \mathbb{R}^n или \mathbb{C}^n : множество замкнуто, если оно задано системой полиномиальных уравнений:

$$\begin{cases} p_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ p_k(x_1, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

k – любое целое число, $p_j(x_1, \dots, x_n)$ – некоторые многочлены от n переменных. Докажите, что это действительно топология. Теорему о многочленах Гильберта (любая система полиномиальных уравнений эквивалентна конечной).

Задача 4 Докажите, что отрезок – связное множество.

Задача 5 Докажите, что открытый интервал $(0, 1)$ гомеоморфен прямой \mathbb{R} .

Задача 6 Докажите, что если X и Y – компактные множества, то $X \times Y$ – компактно.

Задача 7 Проверьте, что $\pi_1(X, x_0)$ – действительно группа, а именно:

1. Определите единичный элемент.
2. Определите элемент, обратный к данному.
3. Докажите, что элемент группы не зависит от выбора параметризации пути, а именно: пусть задана непрерывная функция $\tau(t)$, отображающая отрезок $[0, 1]$ в отрезок $[0, 1]$ такая, что $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = 1$ (не обязательно монотонная). Тогда $\gamma(\tau(t)) \sim \gamma(t)$.
4. Проверьте, что умножение ассоциативно: $\gamma_1 \circ (\gamma_2 \circ \gamma_3) \sim (\gamma_1 \circ \gamma_2) \circ \gamma_3$