

Задачи занятия 16 февраля 2017 года.

Задача 1 *Переформулируйте определение топологического пространства в терминах замкнутых множеств.*

Задача 2 *Постройте счетную базу открытых множеств на прямой \mathbb{R} .*

Задача 3 *Постройте счетную базу открытых множеств для пространства \mathbb{R}^n .*

Задача 4 *Рассмотрим топологию Зарисского в \mathbb{R}^n или \mathbb{C}^n : множество замкнуто, если оно задано системой полиномиальных уравнений:*

$$\begin{cases} p_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ p_k(x_1, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

k – любое целое число, $p_j(x_1, \dots, x_n)$ – некоторые многочлены от n переменных. Докажите, что это действительно топология. Теорему о многочленах Гильберта (любая система полиномиальных уравнений эквивалентна конечной) считать известной.

Задача 5 *Пусть на пространстве X задана топология, в которой открыты само X и пустое множество \emptyset . Опишите все непрерывные отображения $X \rightarrow \mathbb{R}$ и $\mathbb{R} \rightarrow X$.*

Задача 6 *Пусть на пространстве X задана топология, в которой открыты все подмножества (дискретная топология). Опишите все непрерывные отображения $X \rightarrow \mathbb{R}$ и $\mathbb{R} \rightarrow X$.*

Задача 7 *Пусть $p > 1$ – некоторое положительное целое число. Для начала рассмотрим всевозможные дроби вида $x = r \cdot p^n$, где r не делится на p , или, что эквивалентно, конечные дроби вида $x = r_m r_{m-1} \dots r_1 r_0, r_{-1} r_{-2} \dots r_{-n}$, записанные по основанию p . Введем следующую норму на пространстве таких дробей*

$$\|x\|_p = p^{-n}, \quad \|0\|_p = 0$$

и соответствующее ей расстояние

$$\rho(x, y) = \|x - y\|_p.$$

Пополнением этого пространства будут всевозможные дроби, конечные **вправо** и бесконечные **влево**.

Пусть $p = 10$.

1. Чему равно $1/3$?
2. Найдите все решения уравнения $x^2 = x$ (их больше, чем 2).