

Задачи по курсу естественнонаучного содержания – весна 2013 г.

1. Вычислить базисные функции Казимира для алгебры Ли  $so(2, 1)$ .
2. Вычислить базисные функции Казимира для алгебры Ли  $sl(2, \mathbb{R})$ .
3. Вычислить базисные функции Казимира для алгебры Ли  $so(4)$ .
4. Гамильтониан  $h_2$  порождает КдФ в первой скобке. Вычислить уравнение порождаемое им во второй.
5. Доказать гамильтоновость уравнения  $u_t = u'u''' + (u'')^2$ .
6. Доказать гамильтоновость уравнения Sine-Gordon  $u_{tt} - u_{xx} = \sin(u)$ .
7. Доказать гамильтоновость нелинейного уравнения Шредингера  $iq_t = q_{xx} + 2q^2\bar{q}$  в скобке  $\{q(x), \bar{q}(y)\} = i\delta(x - y)$ ,  $\{q(x), q(y)\} = 0$ ,  $\{\bar{q}(x), \bar{q}(y)\} = 0$ ,
8. Рассмотрим движение частицы в поле притягивающего центра, сила притяжения к которому обратно пропорциональна квадрату расстояния до него (задача Кеплера) с гамильтонианом

$$H = \frac{(p_1)^2 + (p_2)^3 + (p_3)^2}{2m} + \frac{\alpha}{\sqrt{((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)}}, \quad \alpha < 0$$

и канонической скобкой

$$\{p_j, x^i\} = \delta_j^i, \quad \{x^i, x^j\} = \{p_i, p_j\} = 0.$$

Проверить, что уэтой системы есть 7 интегралов движения – гамильтониан  $H$ , 3 компоненты вектора момента  $\vec{M}$ :

$$\vec{M} = \vec{x} \times \vec{p}$$

и 3 компоненты **вектора Лапласа**  $\vec{W}$ :

$$\vec{W} = \frac{\vec{p} \times \vec{M}}{m} + \frac{\alpha \vec{x}}{\sqrt{((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)}}.$$

9. Проверить, что Интегралы задачи Кеплера имеют следующие скобки Пуассона

$$\begin{aligned} \{H, M_j\} &= \{H, W_j\} = 0, \\ \{M_1, M_2\} &= M_3, \quad \{M_2, M_3\} = M_1, \quad \{M_3, M_1\} = M_2, \\ \{W_1, W_2\} &= -\frac{2}{m}HM_3, \quad \{W_2, W_3\} = -\frac{2}{m}HM_1, \quad \{W_3, W_1\} = -\frac{2}{m}HM_2, \\ \{M_i, W_i\} &= 0, \\ \{M_1, W_2\} &= -\{M_2, W_1\} = W_3, \\ \{M_2, W_3\} &= -\{M_3, W_2\} = W_1, \\ \{M_3, W_1\} &= -\{M_1, W_3\} = W_2. \end{aligned}$$

10. Зафиксируем  $H = c$ . Тогда компоненты векторов  $\vec{M}$ ,  $\vec{W}$  образуют замкнутую 6-мерную алгебру Ли.
11. Вычислить эту алгебру при  $c < 0$ .
12. Вычислить эту алгебру при  $c = 0$ .
13. Вычислить эту алгебру при  $c > 0$ .